E.N.S.I. DE PHYSIQUE ET DE MECANIQUE 1983

Option TA **PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES** (4 h)

Soit E_0 l'espace vectoriel des applications de R dans R continues et 2π-périodiques, E_1 le sous-espace de E_0 formé des applications ayant une dérivée continue. E_2 le sous-espace de E_1 formé des applications ayant une dérivée seconde continue. Soit f une application de E_0.

PARTIE I

Soit φ une application de E_1; on pose $H(x, t) = \varphi(x-t) f(t)$ pour tout couple (x, t) de $R \times R$.

1. Montrer que $\frac{\partial H}{\partial x}(x, t)$ existe pour tout couple (x, t) de $R \times R$.

2. Prouver que :

   a. f est bornée.

   b. φ' est uniformément continue sur R.

   c. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists h > 0$ tel que $(|x - x_0| \leqslant h) \Rightarrow \left(\left| \frac{\partial H}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial H}{\partial x}(x_0, t) \right| \leqslant \varepsilon \right)$

3. En appliquant le théorème des accroissements finis à l'application $x \longrightarrow H(x, t) - (x - x_0) \frac{\partial H}{\partial x}(x_0, t)$ pour x_0 et t fixés dans R, trouver un majorant simple de $\left| \int_a^b H(x, t)\, dt - \int_a^b H(x_0, t)\, dt - (x - x_0) \int_a^b \frac{\partial H}{\partial x}(x_0, t)\, dt \right|$ pour tous les réels x et x_0 tels que : $|x - x_0| \leqslant h$ (a et b désignent deux réels quelconques).

4. Prouver que l'application $x \longrightarrow \int_a^b H(x, t)\, dt$ est dérivable et que sa dérivée est l'application

$$x \longrightarrow \int_a^b \frac{\partial H}{\partial x}(x, t)\, dt \quad (a \text{ et } b \text{ étant fixés dans R}).$$

5. Soit K l'application de R^3 dans R définie par :

$$(a, b, x) \longrightarrow \int_a^b H(x, t)\, dt .$$

Démontrer que :

a. K est continue. (on pourra écrire :

$$K(a, b, x) - K(a_0, b_0, x_0) = K(a, b, x) - K(a, b, x_0) + K(a, b, x_0) - K(a_0, b_0, x_0)\Big).$$

b. K est différentiable; donner ses dérivées partielles.

c. L'application $L(x) = K\big(u(x), v(x), x\big)$ est dérivable sur R si u et v sont deux applications dérivables de R dans R;

Prouver la relation :

$$L'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial H}{\partial x}(x, t)\, dt + H\big(x, v(x)\big) v'(x) - H\big(x, u(x)\big) u'(x).$$

.../...

Partie II

Dans cette partie φ est une application de E_0 dont la restriction à l'intervalle $[0, 2\pi]$ admet une dérivée seconde continue. On note $\varphi'_d(0)$ et $\varphi'_g(2\pi)$ les dérivées à droite en 0 et à gauche en 2π de φ.

On pose $G(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x - t) f(t)\, dt$ pour tout réel x.

1. Démontrer que G est 2π-périodique.

2. Prouver que G admet une dérivée seconde sur R, que l'on déterminera. (On pourra utiliser la relation suivante :

$$G(x) = \int_{-\pi}^{x} \varphi(x - t) f(t)\, dt + \int_{x}^{\pi} \varphi(x - t) f(t)\, dt \qquad \text{pour} \qquad x \in [-\pi, +\pi]\Big).$$

3. Supposons que φ vérifie en plus : $\forall\ x \in]0, 2\pi[,\ 4\varphi''(x) = -\varphi(x)$;

Démontrer que :

$$G'' - \frac{G}{4} = (\varphi'_d(0) - \varphi'_g(2\pi)) f.$$

4. Déterminer toutes les applications φ qui vérifient les conditions précisées en début de partie II et en II. 3.

Partie III

Dans toute la suite du problème, $G(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \sin \frac{x - t}{2} \right| f(t)\, dt$.

1. Prouver que $4G'' + G = 4f$.

2. Démontrer que l'application $\Phi : f \longmapsto G$ est une application linéaire de E_0 dans E_2.

3. Pour toute application h de E_2, montrer que $\Phi\left(h'' + \frac{h}{4}\right) = h$; en déduire que Φ est bijective.

Partie IV

1. Prouver que les coefficients de Fourier $a_n(G)$ et $b_n(G)$ de l'application G s'expriment en fonction des coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de l'application f par :

$$(1 - 4n^2)\, a_n(G) = 4\, a_n(f) \qquad \text{et} \qquad (1 - 4n^2)\, b_n(G) = 4\, b_n(f)$$

2. Prouver que la série de Fourier de G converge uniformément vers G.

3. Déduire de la question IV. 1. que tout réel $\lambda_n = \frac{4}{1 - 4n^2}$ $(n \in N)$ est valeur propre de Φ. $\big(\forall\ n \in N,\ \exists\ f_n \in E_0,$ $f_n \neq 0$, telle que $\Phi(f_n) = \lambda_n f_n\big)$.

4. Prouver que Φ n'a pas d'autre valeur propre que les réels λ_n.

Partie V

Soit $\mathcal{E}$ l'équation différentielle $4y'' + y = 4f_0$ où f_0 est l'application paire de E_0 définie par : $\forall\ x \in [0, \pi],\ f_0(x) = x$.

1. Prouver que $\mathcal{E}$ a une solution unique 2π-périodique sur R, notée y_0.

2. Développer f_0 en série de Fourier sur R.

3. Déterminer y_0 par sa série de Fourier; résoudre $\mathcal{E}$.

FIN